# 第16講　正弦定理・余弦定理

## §1 ▶ 正弦定理

### 要点整理 と 公式

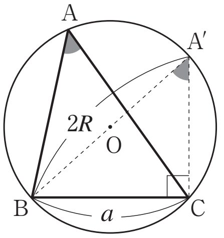
**要点 1 正弦定理**

以降は，△ ABC の 3 つの角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ $A$，$B$，$C$，対辺の長さをそれぞれ $a$，$b$，$c$ とする。

三角形の 3 つの角の正弦と，3 つの辺の長さの関係について考える。

△ABC の外接円(三角形の 3 つの頂点を通る円)の中心を O，半径を $R$ とする。

［1］ $A$ が鋭角のとき

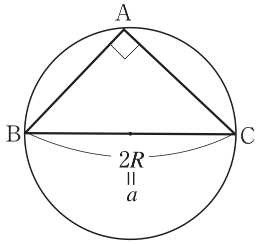



右図の直角三角形 A'BC において，sin ∠A′ = 　　　より

$\dfrac{a}{\sin\angle A'} = 2R$

また，円周角の定理より ∠A′ = $A$　　よって $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

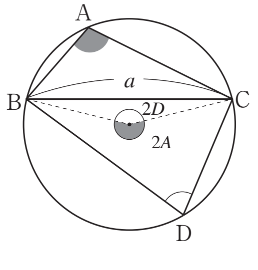
［2］ $A$ が直角のとき




$\sin A = \sin 90^\circ = 1$　より　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{a}{1} = a$

また，$a = 2R$　　よって $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

［3］ $A$ が鈍角のとき




右図で ∠BDC = $D$　とすると $2A+2D = 360^\circ$　より

$A+D = 180^\circ$

よって $D = 180^\circ - A$　より $\sin D = \sin(180^\circ - A) = \sin A$

また，［1］より $\dfrac{a}{\sin D} = 2R$　　よって $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

［1］～［3］より，$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が成り立つ。

同様にして，$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$，$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ。

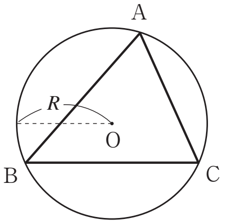
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より，次のことが成り立つ。

## 正弦定理

△ABC において，外接円の半径を $R$ とすると

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$　が成り立つ。




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**1**

(1)　△ABC において，$b = 5$，$B = 45°$，$C = 75°$ のとき，$a$ を求めよ。

また，△ABC の外接円の半径 $R$ を求めよ。

(2)　△ABC において，外接円の半径を $R$ とする。

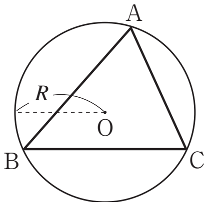
$c = 2\sqrt{3}$，$R = 2$ のとき，$C$ を求めよ。

## Point Pickup

**正弦定理**

△ABC の外接円の半径を $R$ とすると，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ が成り立つ。




ある辺の長さとその対角の大きさ，外接円の半径がらみで使うとよい。

また，2 つの角の大きさがわかると，残り 1 つの角の大きさがわかる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

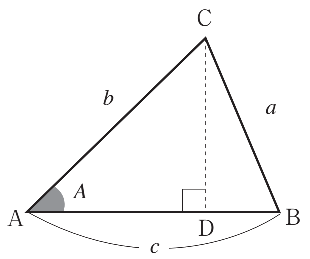
{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# §2 余弦定理

## 要点整理 と 公式

### 要点❷ 余弦定理




右図において，△BCD で三平方の定理より

$BC^2 = CD^2 + BD^2$ …①

また，△ACD において

$\sin A = \dfrac{CD}{b}$ より　$CD = b\sin A$ …②

$\cos A = \dfrac{AD}{b}$ より　$AD = b\cos A$　　よって $BD = AB - AD = c - b\cos A$ …③

②，③，および $BC = a$ を①に代入して

$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

よって $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立つ。

$A$ または $B$ が鈍角の場合も，C から辺 AB の延長に垂線を下ろすことによりこの式は成り立つ。

また，$A$ または $B$ が直角の場合もこの式は成り立つ。

同様に，次の２式も成り立つ。

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$　　$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

以上より，次のことが成り立つ。

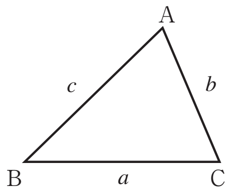
**■ 余弦定理**

△ABC において

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　より

$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$　　　よって　$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　である。

同様に２式　$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，　$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$　が得られる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**2**

(1)　△ABC において，$b=3$，$c=4$，$A=60°$ のとき，$a$ を求めよ。

(2)　△ABC において，$a=5$，$c=7$，$C=120°$ のとき，$b$ を求めよ。

(3)　△ABC において，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{7}$ のとき，$C$ を求めよ。

## Point Pickup

### 余弦定理

△ABC において

① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $\Longleftrightarrow$ ①′ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

② $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ $\Longleftrightarrow$ ②′ $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

③ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $\Longleftrightarrow$ ③′ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

①～③は，2 辺の長さと 1 つの角の大きさから，残りの 1 辺を求めるとき，

①′～③′は，3 辺の長さから，ある角の大きさを求めるときに使うとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

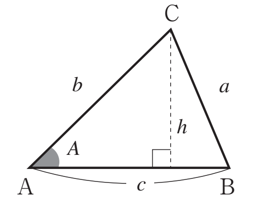
# §3 三角形の面積

## 要点整理 と 公式

### 要点 3 三角形の高さと面積

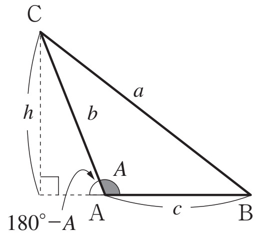
三角比を使って三角形の面積を求める。

△ABC において，辺AB を底辺とするときの高さ $h$ について




(i)　$A$ が鋭角のとき

$$\sin A = \frac{h}{b} \quad \text{より} \quad h = b\sin A$$




(ii)　$A$ が鈍角のとき

$$\sin(180^\circ - A) = \frac{h}{b} \quad \text{より} \quad h = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A$$

(i)，(ii)より　$h = b\sin A$　である。

よって，△ABC の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot b\sin A = \frac{1}{2}bc\sin A$$ と表される。

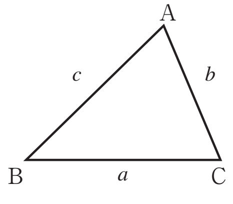
よって△ABC の面積 $S$ は，２辺 $b$，$c$ の長さと，その間の角の正弦の値 $\sin A$ で表される。

他の２辺とその間の角からも同様に求めることができる。

■ 三角形の面積

△ABC の面積を $S$ とすると

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A \qquad S = \frac{1}{2}ca\sin B \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin C$$




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**3**

次の△ABC の面積 $S$ を求めよ。

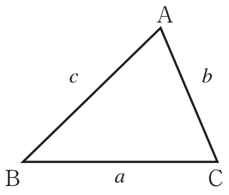
(1)　$b=4$，$c=7$，$A=60^\circ$　　(2)　$a=5$，$b=3$，$C=135^\circ$

(3)　$c=5$，$a=6$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　(4)　$a=13$，$b=7$，$c=8$

## Point Pickup

**三角形の面積 $S$**

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$




　　と　　　　　　(またはその間の角の正弦の値)が
わかっているときはこの公式で面積を求めることができる。

３辺の長さがわかっているときは，以下の手順で面積を求めるとよい。

①　余弦定理で，　　　　　の値を求める。

②　相互関係 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ を用いて　　　　　の値を求める。

③　公式を用いて三角形の面積を出す。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

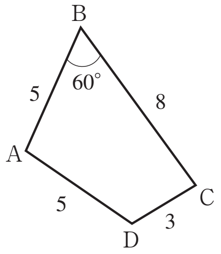
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# §4 図形の計量

## 要点整理 と 公式

### 要点4 四角形の面積

右の図の四角形 ABCD の面積を求めたい。



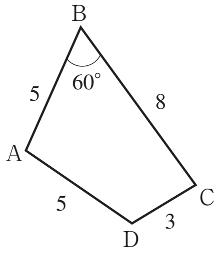

対角線 AC をひき，△ABC と △ACD に分けて考えると，

△ABC は，2 辺とその間の角がわかっているので，

三角比を用いた面積の公式により，面積を求めることができる。

一方，△ACD は，2 辺の長さしかわかっていないので，

このままでは面積を求めることができない。




ここで，△ABC で余弦定理より

$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

$AC > 0$　より　$AC = 7$ である。

よって，△ACD の 3 辺の長さがわかったので，

余弦定理を用いて $\cos D$ の値を求め，相互関係で $\sin D$ の値を求めることにより，

△ACD の面積を公式で求めることができる。

四角形ABCD の面積は，△ABC と△ACD の和によって求めることができる。

このように，四角形などの多角形の面積を求めるときは，三角形に分割し，

それぞれの三角形の面積を求め，その和を計算することで求めることができる。

その際，必要に応じて辺の長さなどを，別の三角形から求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

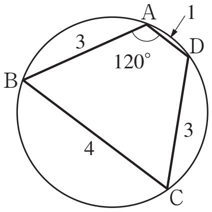
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**4**

円に内接する四角形において，AB = 3，BC = 4，

CD = 3，DA = 1，∠BAD=120° である。

このとき，四角形 ABCD の面積 $S$ を求めよ。




## Point Pickup

### 四角形の面積

① 対角線によって 2 つの三角形に分ける。

② 三角比を用いた面積の公式を用いて，それぞれの三角形の面積を求める。

③ 2 つの三角形の面積の和を求める。

②において必要な辺の長さや角の大きさが不足しているときは，もう一方の三角形を用いて求める。

### 円に内接する四角形

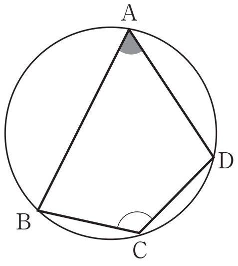
正弦定理の証明のときにも用いたように，

円に内接する四角形 ABCD において，

$A + C =$ 　　　，　$B + D =$ 　　　が成り立つ。

これにより，円に内接する四角形において，

「　　　　　　　　　　　」を求めることができる。




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第16講　確認テスト

**1** (1) △ABCにおいて，$b=3\sqrt{2}$，$A=45°$，$C=105°$のとき，$a=$ ア である。

また，△ABCの外接円の半径は $R=$ イ $\sqrt{\text{ウ}}$ である。

(2) △ABCにおいて，外接円の半径を$R$とする。

$c=6$，$R=6$のとき，$C=$ エオ °， カキク °である。

**2** (1) △ABCにおいて，$a=7$，$b=8$，$C=120°$ のとき，$c=$ ケコ である。

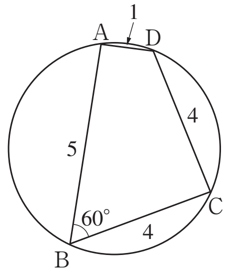
(2) △ABCにおいて，$a=7$，$b=3$，$c=8$のとき，$A=$ サシ °である。

**3** (1) △ABCにおいて，$c=4$，$a=5$，$B=30°$のとき，面積は $S=$ ス である。

(2) △ABCにおいて，$a=4$，$b=5$，$c=6$のとき，$\cos A=\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}}$，

面積 $S=\dfrac{\text{ツテ}\sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}}$ である。

**4** 右の図の四角形ABCDの面積は ニ $\sqrt{\text{ヌ}}$ である。




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第16講　正弦定理・余弦定理

**1**

（1）$A+B+C=180^\circ$ より

$A=180^\circ-B-C=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$

正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

つまり $\dfrac{a}{\sin60^\circ}=\dfrac{5}{\sin45^\circ}$

よって　$a=\dfrac{5}{\sin45^\circ}\times\sin60^\circ=5\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=2R$　　つまり $2R=\dfrac{5}{\sin45^\circ}$

よって $R=\dfrac{5}{\sin45^\circ}=\dfrac{1}{2}=5\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

（2）正弦定理より $\dfrac{c}{\sin C}=2R$　　つまり $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin C}=4$

よって $\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$C=60^\circ,\ 120^\circ$

**2**

（1）余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos60^\circ$$
$$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=13$$

$a>0$ より $a=\sqrt{13}$

（2）余弦定理より $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

よって　$7^2=5^2+b^2-2\cdot5\cdot b\cdot\cos120^\circ$

$$49=25+b^2-2\cdot5\cdot b\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$b^2+5b-24=0$$
$$(b+8)(b-3)=0$$

$b>0$ より $b=3$

（3）余弦定理より

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$= \frac{1^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 1\cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$　　よって $C = 150^\circ$

**3**

(1) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

(2) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$

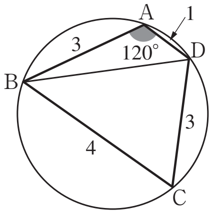
(3) $S = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

(4) $\cos A = \frac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 8} = \frac{49+64-169}{2\cdot 7\cdot 8} = -\frac{56}{2\cdot 7\cdot 8} = -\frac{1}{2}$

$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$　　$\sin A > 0$ より $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

**4**　対角線BDを引く。




△ABDで余弦定理より

$BD^2 = 3^2+1^2-2\cdot 3\cdot 1\cdot \cos 120^\circ = 9+1-2\cdot 3\cdot 1\cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 13$

$BD > 0$ より $BD = \sqrt{13}$

△BCDで余弦定理より

$\cos\angle BCD = \frac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{12}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{2}$

$\angle BCD = 60^\circ$

よって，$S = \triangle ABD + \triangle BCD$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

（別解）四角形ABCDは円に内接するから

$D = 180^\circ - A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，$S = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD}$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第16講　確認テスト

**1**　(1)　△ABC において，$b=3\sqrt{2}$，$A=45^\circ$，$C=105^\circ$ のとき，$a=\boxed{\text{ア}}$ である。

また，△ABC の外接円の半径は $R=\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2)　△ABC において，外接円の半径を $R$ とする。

$c=6$，$R=6$ のとき，$C=\boxed{\text{エオ}}^\circ$，$\boxed{\text{カキク}}^\circ$ である。

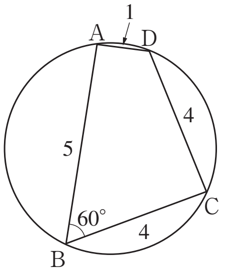
**2**　(1)　△ABC において，$a=7$，$b=8$，$C=120^\circ$ のとき，$c=\boxed{\text{ケコ}}$ である。

(2)　△ABC において，$a=7$，$b=3$，$c=8$ のとき，$A=\boxed{\text{サシ}}^\circ$ である。

**3**　(1)　△ABC において，$c=4$，$a=5$，$B=30^\circ$ のとき，面積は $S=\boxed{\text{ス}}$ である。

(2)　△ABC において，$a=4$，$b=5$，$c=6$ のとき，$\cos A=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$，

面積 $S=\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。




**4**　右の図の四角形ABCD の面積は $\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**{ 解答 }**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | (1) | ア　6 | イ　3 | ウ　2 | | | |
| | (2) | エ　3 | オ　0 | カ　1 | キ　5 | ク　0 | |
| **2** | (1) | ケ　1 | コ　3 | | | | |
| | (2) | サ　6 | シ　0 | | | | |
| **3** | (1) | ス　5 | | | | | |
| | (2) | セ　3 | ソ　4 | タ　7 | チ　4 | ツ　1 | テ　5 |
| | | ト　7 | ナ　4 | | | | |
| **4** | ニ　6 | ヌ　3 | | | | | |

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。